7 Compléments sur la dérivation

Objectifs :

- Savoir calculer la dérivée d'une fonction composée (par racine carrée, puissance...)
- Utiliser à bon escient la dérivation dans une étude de fonction

Aperçu historique :

La notion de nombre dérivé, puis de fonction dérivée sont nées au XVII*e* *siècle (presque) simultanément chez deux scientifiques* ***Leibniz*** *(1646-1716) et* ***Newton*** *(1642-1727) à partir de deux problèmes très différents.*
Leibniz *avait le premier parlé de fonction numérique. Il s'est aussi intéressé aux courbes représentatives de ces fonctions et en particulier aux droites joignant deux points d'une telle courbe. Les points* $A(a; f(a))$ *et* $M(a+h; f(a+h))$ *sont sur la courbe représentative d'une fonction* f*. Le coefficient directeur de la droite* (AM) *est* $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*. Qu'advient-il de ce coefficient directeur lorsque les deux points* A *et* M *sont très proches l'un de l'autre, "infiniment proches" ?*
Newton *s'est intéressé aux mouvements et en particulier aux vitesses d'objets en déplacement : à un instant* t*, un objet a parcouru une distance* d_1*, à l'instant* $t+h$ *(*$h>0$*), il a parcouru la distance* d_2*. Sa vitesse moyenne entre les instants* t *et* $t+h$ *est donc* $V_m = \frac{d_2-d_1}{h}$*. Que devient cette vitesse lorsque les instants* t *et* $t+h$ *sont très proches, "infiniment proches" ?*
Dans les deux cas, on est amené à travailler sur des nombres "infiniment proches" et donc à devoir calculer des quotients de nombres "infiniment proches de 0" : ce sera le « h » qui apparaît dans la formule de calcul du nombre dérivé.

1. Rappels de 1ère : définitions

Si vous avez besoin de révisions plus approfondies, les cours de 1ère S est en ligne.

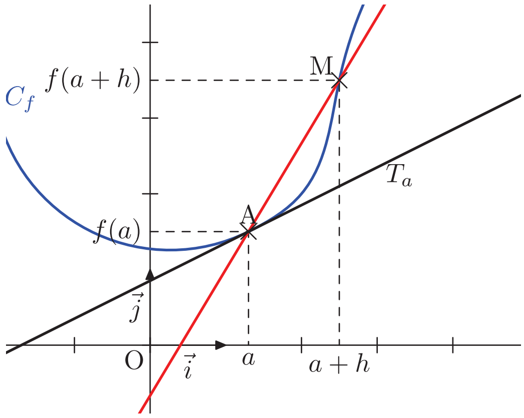
Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts dans l'intervalle I privé de ses bornes. On note h le réel non nul tel que $x = a+h$. On note A et M les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et x.

Définition 7.1 Si la limite lorsque h tend vers 0 du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ vaut l, on dit que f est dérivable en a et cette limite l est appelée nombre dérivé de f en a. On note :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

Interprétation graphique :

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche d'une « position limite » appelée tangente à $\mathscr{C}$ au point A ; son coefficient directeur est alors $f'(a)$.



Propriété 7.1 Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation : $T_a | y = f'(a).(x-a) + f(a)$

Définition 7.2 Si f est dérivable en tout x d'intervalle I on dit que f est dérivable sur I. La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f sur I. On note : $f' : x \longmapsto f'(x)$

Remarque 7.1 Parfois on note $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Ceci pour préciser qu'on dérive par rapport à x.
Ainsi on peut écrire : $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$. Cette écriture signifie que si on prend deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ très proches l'un de l'autre, la différence de leurs ordonnées Δy et la différence de leurs abscisses Δx sont liées par une relation du type :

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon(\Delta x) \text{ avec } \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta x) = 0$$

Remarque 7.2 Si la limite en a du taux de variation est infinie, f est non-dérivable en a mais $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a.

2. Rappels de 1ère : dérivée des fonctions usuelles

Dans la suite, k est un réel quelconque fixé et n est un entier naturel non nul.
Les fonctions sinus et cosinus, qui seront étudiées dans un prochain chapitre, sont intégrées au tableau ci-dessous dans un souci d'exhaustivité.

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité de f
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$

Propriété 7.2 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit $k \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions ku, $u+v$, $u \times v$ et $\frac{u}{v}$ (si v ne s'annule pas sur I) sont dérivables sur I et on a :
$(kf)' = kf'$; $(u+v)' = u'+v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

3. Dérivée d'une fonction composée

Définition 7.3 Soient $u : I \to J$, une fonction définie sur un ensemble I à valeurs dans un ensemble J, et v une fonction définie sur J.

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} v(J)$$

La fonction composée de u par v st définie pour tout x de I par $v \circ u(x) = v\left(u(x)\right)$.

$$I \xrightarrow{v \circ u} v(J)$$

On note $v \circ u$ et on dit "v rond u". (On pense : "v de u")

Remarque 7.3 Attention, la composition n'est en général pas commutative : $u \circ v \neq v \circ u$

Théorème 7.1 Soit u et g deux fonctions telles que $f = g \circ u$ existe sur un intervalle I.
Si u est dérivable en a et si g est dérivable en $u(a)$, alors $f = g \circ u$ est dérivable en a et on a :

$$f'(a) = g'(u(a)) \times u'(a)$$

En généralisant à tout a de I, on obtient :
si u et g sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs, alors f est dérivable sur I et on a :

$$(g \circ u)' = g'(u) \times u'$$

Démonstration Soient a un réel fixé, u une fonction définie et dérivable en a et g une fonction définie et dérivable en $u(a)$. Calculons le nombre dérivé de $f = g \circ u$ en a :
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{(g\circ u)(a+h)-(g\circ u)(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(g(u(a+h))-(g(u(a))}{h}$
Posons $k = u(a+h) - u(a)$. On a $u(a+h) = u(a) + k$, et $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(g \circ u)(a+h) - (g \circ u)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(g\left(u(a+h)\right) - (g\left(u(a)\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(g\left(u(a)+k\right) - (g\left(u(a)\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(g\left(u(a)+k\right) - (g\left(u(a)\right)}{k} \times \frac{k}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(g\left(u(a)+k\right) - (g\left(u(a)\right)}{k} \times \lim_{h\to 0} \frac{k}{h} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{(g\left(u(a)+k\right) - (g\left(u(a)\right)}{k} \times \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \\
&= g'\left(u(a)\right) \times u'(a)
\end{aligned}$$

La fonction $f = g \circ u$ est donc dérivable en a et on a : $f'(a) = g'\left(u(a)\right) \times u'(a)$

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes :

Propriété 7.3 Soit u une fonction telle que $u(x) > 0$ sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par $f = u^n$. Alors f est dérivable sur I et on a :

$$f' = (u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$$

Démonstration Cette propriété peut se démontrer à partir de la factorisation $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$.

Exemple 7.1 $f : x \mapsto (x^2+3)^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme (développer pour s'en convaincre), et $f'(x) = 3(x^2+3)^2 \times 2x = 6x(x^2+3)^2$, à garder sous forme factorisée car après avoir calculé la dérivée, on en étudie généralement le signe.

Généralisation à $n \in \mathbb{Q}$:

Propriété 7.4 Soit u une fonction telle que $u(x) > 0$ sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$. Si u est dérivable sur I, alors f est dérivable sur I et on a :

$$f' = \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple 7.2 $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, et $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}$

Application à la fonction exponentielle :

Théorème 7.2 Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$.
La fonction f est dérivable sur I et pour $x \in I$ on a $f'(x) = \mathrm{e}^{u(x)} \times u'(x)$.
On note aussi : $(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u \times u'$.

4. Dérivées successives

Si une fonction f est dérivable sur I, on peut (généralement) déterminer sa dérivée f' qui est elle-même une fonction définie sur I. On peut donc étudier la dérivabilité de cette dernière sur I et si elle est dérivable aussi on peut déterminer sa dérivée qui est alors appelée dérivée seconde de f sur I et notée f". On peut poursuivre ainsi, et sous condition que les dérivées successives sont dérivables sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n^{e} de f sur I. On a pour $x \in I$:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

Exemple 7.3 Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 7$. Cette fonction est indéfiniment* dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 9x^2 - 4x + 5$;
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ on a $f"(x) = 18x - 4$; ...
* *autant de fois que l'on veut (se démontre par récurrence)*

Exemple 7.4 Soit g la fonction cosinus. Déterminer les dérivées successives de g sur $\mathbb{R}$.

Définition 7.4 Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que f' soit dérivable sur I.
On appelle ***dérivée seconde*** de f sur I la fonction dérivée de f', que l'on note f''.

Exemple 7.5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$.
La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 12x^2 - 18x + 2$.

5. Applications de la dérivation

A. Études de fonctions

Théorème 7.3 (Rappel de première) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I :
- si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I ;
- si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I ;
- si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I ;

Plan général pour une étude de fonction :

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le domaine d'étude de f, grâce à des arguments de parité et/ou de périodicité (voir à ce sujet le chapitre sur les fonctions trigonométriques ci-après).
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
4. Déterminer la dérivée f'.

5. Déterminer le signe de f' sur le domaine d'étude (penser à factoriser) ; en déduire le sens de variation de f.
6. Dresser le tableau de variations de f
7. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
8. En déduire d'éventuelles asymptotes, donner leur équation et dire si la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous ou au-dessus de l'asymptote
9. Pour aider au tracé, calculer la valeur de $f(x)$ en quelques points remarquables, et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ces points
10. Tracer la représentation graphique de f sur son domaine d'étude (restreint), puis compléter par symétrie etc... à tout le domaine de définition

Exemple 7.6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(-2)$ et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant les résultats de la question précédente, étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*_-$ par $g(x) = x^2 + 3x - \frac{4}{x}$.

B. Calculs de limites

Lorsqu'on sait qu'une fonction est dérivable, on peut utiliser sa fonction dérivée pour déterminer une limite qui « ressemble » à un taux de variation.

Exemple 7.7 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.
On reconnaît ici le taux de variation de la fonction $\cos$ entre 0 et x, en effet on a $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - 1}{x - 0}$. La limite lorsque x tend vers 0 de cette expression est donc le nombre dérivé de la fonction $\cos$ en 0.
Or pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos' x = -\sin x$, Donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin 0 = 0$$

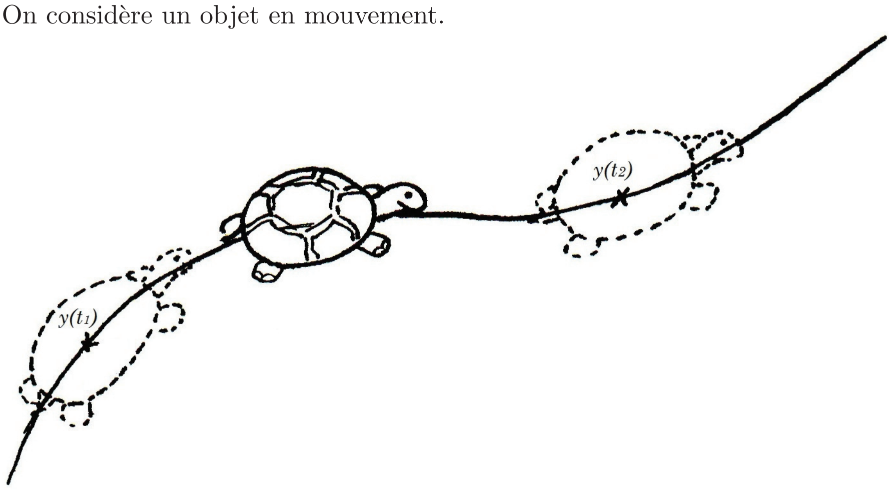
C. En physique

a. Notation des dérivées en physique

Soit f une fonction dérivable sur I.
On a vu dans la remarque 7.1 que $f'(x)$ se note aussi parfois $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$; de même $f"(x)$ se note aussi parfois $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)$, ...
Ceci est utile lorsque plusieurs variables interviennent dans une expression ; ainsi en physique, la vitesse d'un solide est la dérivée de « la position » par rapport au temps : on note $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$. L'accélération se note $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t)$.
En physique, on note parfois la dérivée par rapport au temps en marquant un point au-dessus de la fonction : Si un mobile se déplace sur un axe, la position est donnée par la fonction $x : t \mapsto x(t)$. On a alors $x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{x}(t)$. On note aussi $x" = \ddot{x}$ (les notations $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ signifient qu'on dérive par rapport au temps).

b. Exemple : la chute libre

On considère un objet en mouvement.

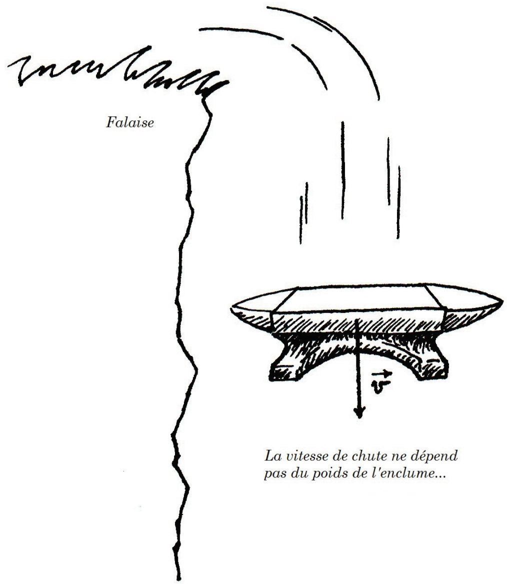


On note t la durée en secondes de son parcours, et $y(t)$ la distance en mètres, parcourue après t secondes.
Comme la vitesse moyenne est $V_m = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$, si on note t_1 et t_2 deux instants,
la distance parcourue entre t_1 et t_2 est $t_2 - t_1$, et le temps de parcours de cette distance est $y(t_2) - y(t_1)$.
Donc le quotient $\frac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}$ est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2.
On s'intéresse à ce que devient cette vitesse lorsque les instants t_1 et t_1 deviennent "infiniment proches".

Définition 7.5 :
Dans les conditions précédentes, la limite de la vitesse moyenne quand t_2 se rapproche de t_1 (c'est à dire le nombre dérivé de y en t_1) est appelée <u>vitesse instantanée</u> de l'objet à l'instant t_1.

$$V(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_1 + h) - y(t_1)}{h}$$

<u>**Exemple**</u> :
On lâche un objet en chute libre. On note $x(t)$ la distance parcourue (en m) après t secondes.
On admet ([1]) que la distance parcourue s'exprime en fonction du temps de parcours par $x(t) = 4,9t^2$.
Calculer la vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes.



On exprime la vitesse moyenne de l'objet entre les instants t et $t+h$:

$$v = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{4,9(t+h)^2 - 4,9t^2}{h}$$

En développant, réduisant et simplifiant, on obtient :

$$v = \frac{4,9(t^2 + 2th + h^2) - 4,9t^2}{h} = \frac{9,8th + 4,9h^2}{h} = 9,8t + 4,9h$$

Lorsque h tend vers 0, ce quotient se rapproche de $9,8t$: on a $\lim_{h \to 0}(9,8t + 4,9t) = 9,8t$.
Donc la vitesse instantanée de l'objet en chute libre est donnée par l'expression $v(t) = x'(t) = 9,8t$.
Après 5 secondes de chute libre, la vitesse est de $9,8 \times 5 = 49$ m/s. (soit 179,4 km/h).

([1])Distance parcourue en chute libre : $d = \frac{1}{2}gt^2$, où $g \simeq 9,80665 m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.
On remarque que la vitesse de chute libre est indépendante de la masse de l'objet.

6. Primitives d'une fonction

A. Définition, premiers exemples.

Définition 7.6 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$ on a $F'(x) = f(x)$.

Exemple 7.8 Soit $f : x \mapsto \cos(x)$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F : x \mapsto \sin(x)$.
Soit $g : x \mapsto 2x^3 - 4x$. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction $G : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$.

Exemple 7.9 Tableau de primitives usuelles où u est une fonction dérivable sur l'ensemble indiqué, n un entier naturel et k un réel quelconque :

Fonction f	Primitive F	Ensemble
$f(x)=k$	$F(x)=kx$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f=u\times u'$	$F=\frac{1}{2}u^2$	$\mathbb{R}$
$f=u'\times u^n$	$F=\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f=\frac{u'}{u}$	$F=\ln(u)$	pour x, $u(x)\in\mathbb{R}_+^*$
$f=\frac{u'}{u^2}$	$F=-\frac{1}{u}$	pour x, $u(x)\neq 0$
$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}$	pour x, $u(x)>0$
$f(x)=u'e^u$	$F(x)=e^u$	$\mathbb{R}$
$f(x)=u'\cos(u)$	$F(x)=\sin(u)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=u'\sin(u)$	$F(x)=-\cos(u)$	$\mathbb{R}$

Propriété 7.5 Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I. [a]

a. Ceci est admis pour l'instant, et sera démontré au chapitre sur les intégrales.

B. "définition à une constante près", unicité s'il y a une "condition initiale"

Propriété 7.6 Soit f une fonction continue sur I. Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Démonstration Cette démonstration est au programme.
Soient F et G deux primitives de la fonction f sur I.
Alors, pour tout réel x de I, on a $F'(x)=f(x)$ et $G'(x)=f(x)$.
D'où $F'(x)=G'(x)$, i.e. $F'(x)-G'(x)=0$, ou encore $(F-G)'(x)=0$, pour tout réel x de I.
Ainsi la fonction $F-G$ est constante sur I.
Soit k la valeur de cette constante. On a : $\forall x\in I, F(x)-G(x)=k$, i.e. $F(x)=G(x)+k$.
Les deux primitives F et g diffèrent d'une constante k.

Théorème 7.4 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I alors f admet une infinité de primitives et toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x)=F(x)+k$ où k est un réel quelconque.

Démonstration Soit $k\in\mathbb{R}$ et $G:x\mapsto F(x)+k$.
La fonction G est dérivable sur I et pour $x\in I$ on a $G'(x)=F'(x)=f(x)$ donc G est une primitive de f sur I.
Réciproquement, soit G une autre primitive de f que F sur I. La fonction $G-F$ est dérivable sur I et pour $x\in I$ on a $(G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$.
Donc la fonction $G-F$ est constante sur I et il existe donc un réel k tel que pour tout $x\in I$ on a $G(x)=F(x)+k$.

Théorème 7.5 Soit f une fonction définie sur I et admettant des primitives sur I. Soit $x_0\in I$ et $y_0\in\mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0)=y_0$.

Démonstration Supposons qu'il existe deux primitives F et G de f sur I telles que $F(x_0)=G(x_0)=y_0$.
D'après le théorème 7.4, il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in I$ on a $G(x)=F(x)+k$.
En particulier si $x=x_0$, on obtient : $y_0=y_0+k$ donc $k=0$ et $F=G$.
La primitive vérifiant la condition initiale $F(x_0)=y_0$ est unique.

Exemple 7.10 Déterminer la forme générale des primitives de $f:x\mapsto\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.